第43卷 第2期
2023年4月

桂林电子科技大学学报
Journal of Guilin University of Electronic Technology

Vol. 43, No. 2
Apr. 2023

变系数 Volterra 型积分微分方程的 2 种 Legendre 谱 Galerkin 数值积分方法

范友康[1]，张克磊[1]，覃永辉[1,2,3]

(1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院，广西 桂林 541004；
2. 桂林电子科技大学 广西自动检测技术与仪器重点实验室，广西 桂林 541004；
3. 桂林电子科技大学 广西高校数据分析与计算重点实验室，广西 桂林 541004)

摘 要：为了进一步提高求解 Volterra 型积分微分的数值精度，针对一种变系数 Volterra 型积分微分方程，提出了 2 种 Legendre 谱 Galerkin 数值积分法。采用 Galerkin Legendre 数值积分对 Volterra 型积分微分方程的积分项进行预处理，对其构造 Legendre tau 格式，同时用 Chebyshev-Gauss-Lobatto 配置点对变系数和积分项部分进行计算，并通过对方程的定义区间进行分解，提出了一种多区间 Legendre 谱 Galerkin 数值积分法。该方法的格式对于奇数阶模型具有对称结构。此外，通过引入 Volterra 型积分微分方程的最小二乘函数，构造了 Legendre 谱 Galerkin 最小二乘数值积分法。该方法对应的代数方程系数矩阵是对称正定的。数值算例验证了这 2 种 Legendre 谱 Galerkin 数值积分方法的高阶精度和有效性。

关键词：积分微分方程；数值积分；Chebyshev-Gauss-Lobatto 插值；最小二乘法；Legendre Galerkin

中图分类号：O241.83 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-808X(2023)02-0158-07

Two kinds of Legendre spectral Galerkin numerical integration methods for Volterra type integral differential equations with variable coefficient

FAN Youkang[1], ZHANG Kelei[1], QIN Yonghui[1,2,3]

(1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China;
2. Guangxi Key Laboratory of Automatic Detecting Technology and Instruments, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China;
3. Guangxi Key Laboratory of Cryptography and Information Security, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: In order to further improve the numerical accuracy of solving Volterra integro-differential, two kinds of Legendre spectral Galerkin numerical integration methods are investigated for the Volterra-type integro-differential equation with variable coefficients. Firstly, the Galerkin Legendre numerical integration is applied to deal with the integral term of the Volterra-type integro-differential equations. Secondly, the Legendre tau scheme is developed for the Volterra-type integral-differential equations with variable coefficient, and the Chebyshev-Gauss-Lobatto collocation point is used to the calculation of the variable coefficient and integral term. Finally, by decomposing the definition interval of the function, the multi-interval Legendre spectral Galerkin numerical integration method is also designed. Its scheme of the proposed method has symmetric structure for odd-order model. In addition, by introducing the least squares function of the Volterra type integro-differential equation, the Legendre spectral Galerkin least-squares numerical integration method of is constructed. The corresponding coefficient matrix of the algebraic equation is symmetric positive. Some numerical examples are given to test the high-order accuracy and the effectiveness of our methods.

Key words: integral differential equations; numerical integration; Chebyshev-Gauss-Lobatto interpolation; least square method; Legendre Galerkin

---

收稿日期：2022-03-31

基金项目：国家自然科学基金(12161025)；广西自动检测技术与仪器重点实验室基金(YQ22106)；广西科技基地和人才专项(桂科 AD18281025)；桂林电子科技大学研究生教育创新计划(2020YCXS086)

通信作者：覃永辉(1985—)，男，副教授，博士，研究方向为偏微分方程数值解法。E-mail：yonghui1676@163.com

引文格式：范友康，张克磊，覃永辉. 变系数 Volterra 型积分微分方程的 2 种 Legendre 谱 Galerkin 数值积分方法[J]. 桂林电子科技大学学报，2023，43(2)：158-164.

Volterra 型积分微分方程作为带记忆性质的数学模型，通常出现在超流体问题[1]、金融数学问题[2]、Turbulent 扩散问题[3]等领域。通常来说，由于 Volterra 型积分微分方程具有记忆性质，它的精确解很难得到，且也为构造其数值解法带来许多麻烦[1]。为了推广 Volterra 型积分微分方程在实际问题的应用，相关学者进行了研究[1,4]。另外，对于变系数 Volterra 积分微分方程，当采用谱配置方法逼近时，得到的矩阵往往是稠密的，因此增加了求解的难度[1,4]。

考虑如下积分微分方程：

$$\begin{cases}\partial_x u(x)=a(x)u(x)+f(x)+\\ \qquad\int_0^x K(x,s)u(s)\mathrm{d}s,\ x\in I=(0,T],\\ u(0)=u_0。\end{cases}\tag{1}$$

定义 $D:=\{(x,s)\mid 0\leqslant s\leqslant x\leqslant T\}$，假设 $f(x)$、$a(x)$ 为已知的光滑函数，$K(x,s)$ 为核函数。对于变系数 Voltrra 积分微分方程(1)，近年来，各种数值解法也得到广泛关注与研究，如配置法[4-6]、隐式 Runge-Kutta 法[7-8]、hp-连续 Petrov-Galerkin 有限元法[9]、拟谱方法[10]、Legendre Galerkin 方法[11]、谱 Galerkin 多项式法[12]、谱 Petrov-Galerkin 方法[13]、Moving 最小二乘法[14-15]等。

许多学者对谱方法求解积分方程进行了研究。如 Jiang[16]研究了 Volterra 型积分微分方程的谱 Legendre 配置法，从理论上给出了谱精度收敛的证明。Li 等[17]给出了线性重心有理法求解 Volterra 积分微分方程。Gu[18]介绍了一种多步 Chebyshev 谱配置法。Wang 等[19]研究了 Volterra 积分微分方程的 hp-Legendre Jacobi 谱配置法，得到了关于光滑核和弱奇异核的一些近似结果。

Tang 等[20]研究了具有周期边界条件的抛物型方程的单区间和多区间 Legendre tau 谱方法。Zhang 等[21]针对一阶常微分方程的初值问题提出了 Legendre tau 方法。Qin 等[22]研究了发展方程的 Legendre tau Galerkin 谱配置法。Karimi 等[23]提出了一种最小二乘法求解线性 Fredholm 积分方程。胡玉巧等[24]针对一种抛物型方程研究了 Legendre Galerkin 谱配置最小二乘法。Maleknejad 等[25]提出了一种块脉冲函数运算矩阵法，它利用块脉冲函数及其积分的随机运算矩阵，可将 Ito-Volterra 积分方程简化为线性下三角方程组，但得到的结果精度不是很高。在文献[25]的基础上，Ahmadinia 等[26]提出了一种基于最小二乘法和块脉冲函数的求解 Ito-Volterra 积分方程的计算方法，其精度优于块脉冲函数运算矩阵法。本文的方法对积分微分方程中的积分项部分先采用 Galerkin Chebyshev-Gauss-Lobatto 或 Legendre-Gauss-Lobatto 数值积分方法进行离散，然后给出 Legendre tau 格式，采用 Chebyshev 对变系数部分和源项进行插值处理。

1　符号和格式

对任意的 $r\geqslant 0$，设 $H^r(I)$ 为经典 Sobolev 空间。令 $P_N(I)$ 为次数不超过 N 的多项式集合。I_N^C 为 Chebyshev-Gauss-Lobatto 插值算子 $I_N^C:C(\bar I)\to P_N(I)$，使得

$$I_N^C u(x_i^C)=u(x_i^C),\ 0\leqslant i\leqslant N。$$

令 $I_N^L:C(\bar I)\to P_N(I)$ 为 Legendre-Gauss-Lobatto 插值算子，使得

$$I_N^L u(x_i^L)=u(x_i^L),\ 0\leqslant i\leqslant N,$$

其中，$\{x_i^C\}$、$\{x_i^L\}$ 分别为 Chebyshev-Gauss-Labotto 点、Legendre-Gauss-Labotto 点。

1.1　Legendre 谱 Galerkin 数值积分法

考虑式(1)的弱格式：求 $u\in H^1(I)$，使得

$$\begin{cases}(\partial_x u,v)=(au,v)+\\ \qquad(\int_0^x K(x,s)u(s)\mathrm{d}s,v)+(f,v),\\ u(0)=u_0,\forall v\in L^2(I)。\end{cases}\tag{2}$$

因此，式(2)的 Legendre 谱 Galerkin 数值积分法为：对于任意 $v\in P_{N-1}(I)$，求 $u_N\in P_N(I)$，使得

$$\begin{cases}(\partial_x u_N,v)=(I_N^C[au_N],v)+(I_N^C f,v)+\\ \qquad(I_N^C\int_0^x I_N^L(K(x,s)u_N(s))\mathrm{d}s,v),\\ u(0)=u_0。\end{cases}\tag{3}$$

考虑多区间 Legendre 谱 Galerkin 数值积分格式。首先，将区间 $I=[0,T]$ 划分为一些子区间 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_M=T$，即 $I=\bigcup_{i=1}^{M}(x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,M$。

$$u^i(x)=u(x)|_{x\in(x_{i-1},x_i]},\ 1\leqslant i\leqslant M。$$

令 $I_i=(x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,M$。设 $P_{N_i}(I_i)$ 为区间 I_i 上次数不超过 N_i 的多项式集合。定义 I_i 上对应的 Chebyshev 插值算子 $I_{i,N_i}^C:C(\bar I_i)\to P_{N_i}(I_i)$ 为

$$(I_{i,N_i}^C u)|_{I_i}(x_{i,j}^C):=u|_{I_i}(x_{i,j}^C),j=0,1,\cdots,N_i,\ x_{i,j}^C\in I_i,1\leqslant i\leqslant M。$$

Legendre 插值算子 $I_{i,N_i}^L:C(\bar I_i)\to P_{N_i}(I_i)$ 为

$$(I_{i,N_i}^L u)|_{I_i}(x_{i,j}^L):=u|_{I_i}(x_{i,j}^L),j=0,1,2,\cdots,N_i,\ x_{i,j}^C\in I_i,1\leqslant i\leqslant M。$$

在每个区间采用 Legendre 谱 Galerkin 数值积分求解，即式(1)的多区间 Legendre Galerkin 数值积分格式为：

对于任意 $v\in P_{N_k-1}(I_k)$，求 $u_N^k\in P_{N_k}(I_k)$，使得

$$\begin{cases}(\partial_x u_{N_k}^k,v)=(I_{k,N_k}^C[au_{N_k}^k],v)+(I_{k,N_k}^C f,v)+\\ \quad\sum_{i=1}^{k-1}(I_{i,N_i}^C\int_{I_i}I_{i,N_i}^L K(x,\eta)u_{N_i}^i(\eta)\mathrm{d}\eta,v)+\\ \quad(I_{k,N_k}^C\int_{x_{k-1}}^x I_{k,N_k}^L(K(x,s)u_{N_k}^k(s))\mathrm{d}s,v),\\ u_N^1=u(0),u_N^i=u_N^{i-1}(x_{i-1})。\end{cases}\tag{4}$$

1.2 算法实施

取试探基函数[22]为

$$\phi_0(x)=1,\ \phi_1(x)=L_{T,0}(x)+L_{T,1}(x),$$
$$\phi_k(x)=L_{T,k}(x)-L_{T,k-2}(x),\quad 2\leqslant k\leqslant N,$$

其中：$L_{T,l}(x)$ 为位移 Legendre 多项式；l 为多项式的次数。令

$$u_{N_k}^k(x)=\sum_{i=1}^{N_k}\hat{u}_i^k\phi_i(x)+u_{N_k}^k。$$

引入刚度矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和质量矩阵 $\boldsymbol{M}$：

$$\boldsymbol{S}=(S_{ij})=(\phi'_j,L_{T,i}),$$
$$\boldsymbol{M}=(M_{ij})=(\phi_j,L_{T,i})。$$

令 $\eta:=\frac{h_i}{2}x+\frac{x_{i-1}+x_i}{2},s:=s(x,\tau)=\frac{\tau+1}{2}x$。

在式(4)中，取 $v=L_{T,l}(x),l=1,2,\cdots,N-1$，则式(4)的离散系统为

$$(\boldsymbol{S}^k-\boldsymbol{M}^k-\boldsymbol{\Lambda}^k)\boldsymbol{u}^k=\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{u}^k=(\hat{u}k_1,\hat{u}_2^k,\cdots,\hat{u}_N^k),$$

其中，

$$I_{k,N_k}^C[\int_0^x I_{k,N_k}^L(K(x,s)u_{N_k}^k(s))\mathrm{d}s]=$$
$$I_{k,N_k}^C\left[\frac{x}{2}\sum_{i=1}^{N_k}\hat{u}_i^k\sum_{j=0}^{N_k}K(x,s(x,\tau_j))\phi_i(s(x,\tau_j))\omega_j\right],$$

则

$$\boldsymbol{\Lambda}^k=$$
$$\left(I_{k,N_k}^C\left[\frac{x}{2}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}K(x,s(x,\tau_j))\phi_i(s(x,\tau_j))\omega_j\right],L_{T,l}\right),$$

$$\boldsymbol{F}=(I_N^C f,L_{T,l})+\sum_{i=1}^{k-1}(I_{i,N_i}^C\int_{I_i}I_{i,N_i}^L K(x,\eta)u_{N_i}^i(\eta)\mathrm{d}\eta,L_{T,l}),$$
$$0\leqslant l\leqslant N-1。$$

1.3 Legendre 谱 Galerkin 最小二乘数值积分法

对于任意的 $v\in P_N(I)$，式(1)的最小二乘函数可定义为

$$F(v;f)=\|f-v'(x)+a(x)v(x)+\int_0^x K(x,s)v(s)\mathrm{d}s\|^2。\tag{5}$$

相应的最小值问题为：求 $u\in P_N(I)$，使得

$$F(u;f)=\min_{v\in P_N(I)}F(v;f)。$$

因此，式(5)的变分形式为：

求 $u\in P_N(I)$，使得

$$(\partial_x u,\partial_x v)-(a(x)u(x),\partial_x v)-(\int_0^x K(x,s)u(s)\mathrm{d}s,\partial_x v)=(f,\partial_x v),\quad\forall v\in P_N(I)。\tag{6}$$

进一步，给出式(6)的 Legendre Galerkin 最小二乘数值积分格式：求 $u_N\in P_N(I)$，使得

$$(\partial_x u_N,\partial_x v)-(I_N^C[a(x)u_N(x)],\partial_x v)-(I_N^C\int_0^x I_N^L K(x,s)u_N(s)\mathrm{d}s,\partial_x v)=(I_N^C f,\partial_x v),$$
$$\forall v\in P_N(I)。\tag{7}$$

类似地，基于上述的区间划分，式(7)的多区间 Legendre Galerkin 最小二乘数值积分格式为：

求 $u_{N_k}^k\in P_{N_k}(I_k)$，使得

$$\begin{cases}(\partial_x u_{N_k}^k,\partial_x v)=(I_{k,N_k}^C[au_{N_k}^k],\partial_x v)+(I_{k,N_k}^C f,\partial_x v)+\\ \quad\sum_{i=1}^{k-1}(I_{i,N_i}^C\int_{I_i}I_{i,N_i}^L K(x,\eta)u_{N_i}^i(\eta)\mathrm{d}\eta,\partial_x v)+\\ \quad(I_{k,N_k}^C\int_{x_k}^x I_{k,N_k}^L(K(x,s)u_{N_k}^k(s))\mathrm{d}s,\partial_x v),\\ u_N^1=u(0),u_N^i=u_N^{i-1}(x_{i-1}),\forall v\in P_{N_i}(I_i)。\end{cases}\tag{8}$$

格式(7)的实施过程：令基函数为如下形式[24]

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{2}(L_0(x)-L_1(x)),$$
$$\varphi_1(x)=\frac{1}{2}(L_0(x)+L_1(x)),$$
$$\varphi_k(x)=L_k(x)-L_{k-2}(x),k\geqslant 2。$$

引进矩阵

$$\boldsymbol{W}=(W_{ij})=(\partial_x\varphi_i,\partial\varphi_j),$$

令 $v=\varphi_l,l=0,1,\cdots,N$，并代入式(7)，可得

$$(\boldsymbol{W}-\boldsymbol{\Pi})\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{F}},$$

其中：

$$\boldsymbol{\Pi}=(\Pi_{kl})=(I_N^C a(x)\varphi_k,\partial\varphi_l)+(I_N^C\int_0^x K(x,s)\varphi_k(s)\mathrm{d}s,\partial_x\varphi_l);$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}=(I_N^C f,\partial_x\varphi_l)。$$

2 数值算例

分别给出一些数值算例验证所构造的 2 种方法

的高阶精度与有效性。利用 2 种数值格式解出它们的数值解，并与精确解进行比较，求出 L^∞ -范数误差。将 2 种方法的数值实验得到的数值误差与文献[18]中的误差进行比较。定义

$$\hbar := \max\{(x_i - x_{i-1})/2 : i = 0,1,\cdots,M\}。$$

例 1　考虑 Volterra 积分微分方程

$$a(x) = \cos x,\ K(x,s) = \frac{9}{4}\mathrm{e}^{\frac{9(1+x)(1+s)}{4}},\qquad (9)$$

对应的精确解为 $u(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}(1+x)} - \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$。

本例验证 Legendre Galerkin 数值积分法的有效性。分别用式(3)、(4)求解本例，将单区间的 Legendre Galerkin 数值积分式(3)和多区间的式(4)进行比较，区间划分个数 M 取 1、2，其误差如图 1 所示。从图 1 可看出，当多项式次数 N 取 10 时，精度达到了 10^{-10}，这表明该方法具有高阶谱精度；当取相同的多项式次数 N 时，$M=2$ 时得到的精度优于 $M=1$ 时的精度。

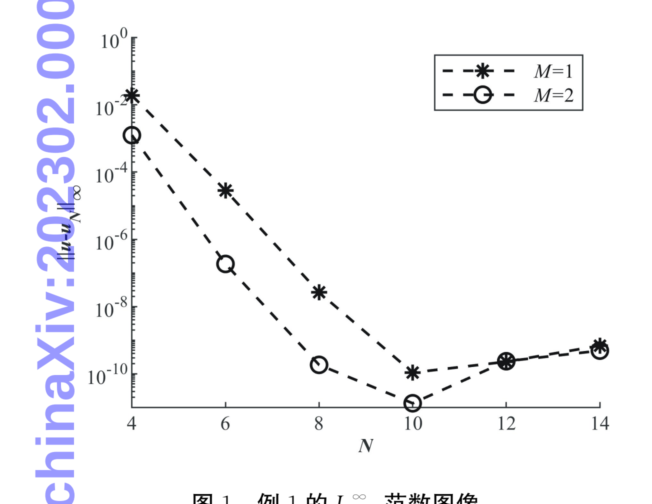


图 1　例 1 的 L^∞ -范数图像

例 2　考虑 Volterra 积分微分方程

$$\begin{cases}\partial_x u = \dfrac{2m+1}{2}x^{m-\frac{1}{2}} - x^{m+\frac{1}{2}}\sin x - \dfrac{1}{2(m+1)}x^{2(m+1)} + \\ \qquad \sin xu + \displaystyle\int_0^x xu + \int_0^x s^{m+\frac{1}{2}}u(s)\mathrm{d}s, \\ u(0) = 0,\end{cases}\qquad (10)$$

其精确解为 $u(x) = x^{m+\frac{1}{2}}, x \in (0,2]$。

对于例 2，文献[18]用 MCSC 方法求解 Volterra 积分微分方程(10)，且在表 1 中给出了其 L^∞ -范数误差。利用式(4)求解例 2 中 $m=1,3$ 时的 Volterra 积分微分方程(10)，表 1 为 L^∞ -范数误差。为了方便 2 种方法进行比较，依次取 $1/\hbar = 50,100,200$ 和多项式的次数为 $N_i = N = 3$。图 2 为它们的 L^∞ -范数误差的图像。从表 1 和图 2 可看出，当 $m=3$ 时，式(4)的精度略优于 MCSC 方法的精度；$m=1$ 时，式(4)的误差与 MCSC 方法类似。因此，可以断定式(4)对于 Volterra 积分微分方程是有高阶精度的。

表 1　$N_i = N = 3$ 时，例 2 的 L^∞ -范数误差

方法	m	$1/\hbar$ 50	100	200
MCSC	1	4.22×10^{-4}	1.49×10^{-4}	5.27×10^{-5}
	3	2.01×10^{-7}	1.83×10^{-8}	1.65×10^{-9}
格式(4)	1	1.59×10^{-4}	5.63×10^{-5}	1.99×10^{-5}
	3	3.00×10^{-8}	2.65×10^{-9}	2.35×10^{-10}

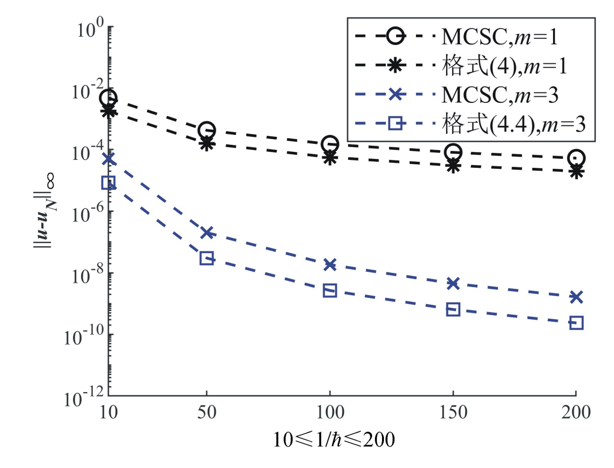


图 2　例 2 的 L^∞ -范数图像

例 3　考虑具有如下核函数和精确解的积分微分方程

$$K(x,s) = \frac{x}{s+1},\ u = \log(x+1),\ a(x) = 1,$$
$$x \in [0,T],\qquad (11)$$

初值条件为 $u(0) = 0$。

在例 3 中，利用多区间 Legendre 谱 Galerkin 数值积分法(4)处理计算区间较大(T 从 50 增加到 10^3)的问题，取 $N=10$，$\hbar = 1/2$。对应的 L^∞ -范数误差如图 3 所示。从图 3 可知，随着 T 的增大，误差也随着增大，当区间长度增大到 $T=350$ 时，误差稳定在 10^{-12}，因此当选择合适的多项式次数和区间划分，该方法对计算区间较大的问题也有效，且具有高阶谱精度。

例 4　考虑如下积分微分方程

$$\begin{cases}\partial_x u(x) = e^x(1 - \sin x - x) + (\sin x)u(x) + \\ \qquad \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{x-s}u(s)\mathrm{d}s,\ x \in (0,2], \\ u(0) = 1。\end{cases}\qquad (12)$$

假设其精确解为 $u(x)=e^x$。

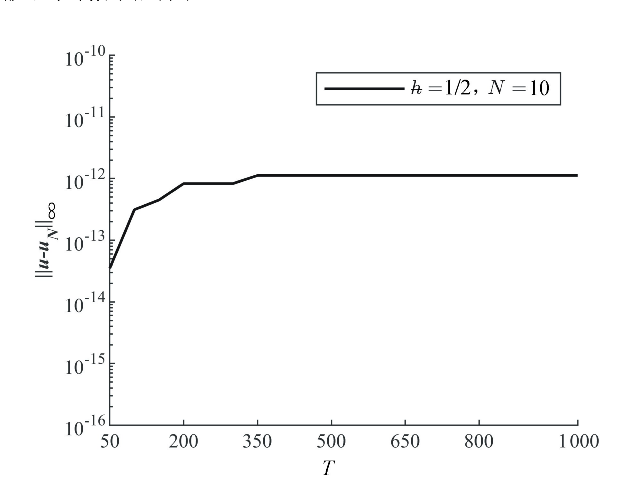


图 3　例 3 的 L^∞ -范数误差

Gu 等[18]用多步 Chebyshev 谱配置(MCSC)方法求解本例,其结果如文献[18]中图 1 所示。图 4 为式(7)的 L^∞ -范数误差曲线。$1/h=1$ 时,MCSC 对应的是单步法,取多项式次数 $N=2,4,6,8,10$ 和 12。从图 4 可知,2 种方法的 L^∞ -范数误差相似。

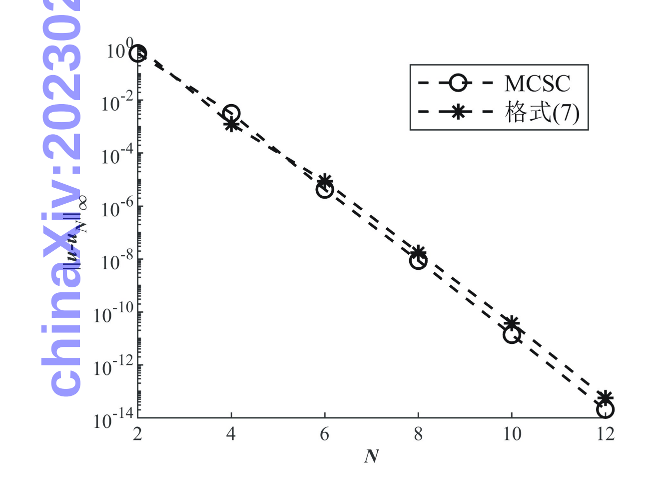


图 4　例 4 关于式(7)和 MCSC 法的 L^∞ -范数误差图像

例 4 还考虑了 MCSC 方法取不同区间划分 $1/h=10,50,100,150$ 和 200 时的情况,且多项式的次数为 $N_i=N=3$,对应的 L^∞ -范数误差如图 5 所示。为了表明式(8)的谱精度,在计算时同样取 $1/h=10,50,100,150$ 和 200,图 5 为它的误差。该方法给出的数值结果略优于文献[18]。

例 5　考虑 Volterra 积分微分方程

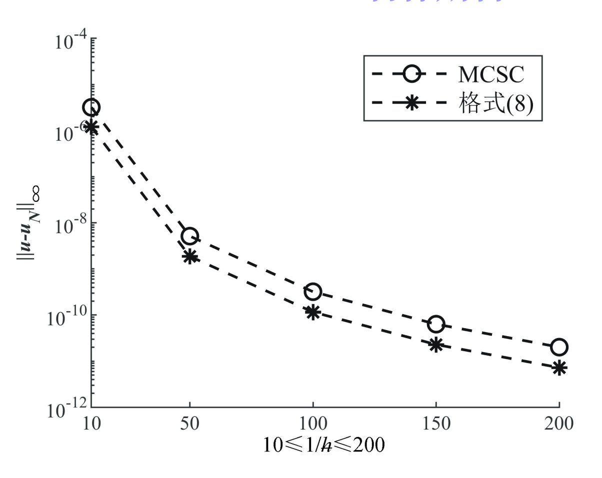


图 5　例 4 关于式(8)和 MCSC 法的 L^∞ -范数误差

$$\begin{cases}\partial_x u(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sin x}{4}(\cos 2x-1)-\\ \qquad\dfrac{\cos x}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)+\cos x u(x)+\\ \qquad\displaystyle\int_0^x \sin(x+s)u(s)\mathrm{d}s,\ t\in I,\\ u(0)=0。\end{cases}\tag{13}$$

选择适当右端源项与核函数使得对应的精确解为 $u(x)=\sin x, x\in I:=[0,T]$。

分别利用文献[18]中的 MCSC 方法和多区间 Legendre 谱 Galerkin 最小二乘数值积分法(8)求解式(13)的 L^∞ -范数误差,其图像如图 6 所示。文献[18]中,配置点固定数为 11(即多项式次数 $N=10$),子区间大小固定为 $h=1/2$。为了方便比较,令式(8)计算时多项式次数固定为 $N=10$(配置点数量为 11),取 $h=1/2$,令 $T=2,5,10,15,20$。从图 6 可看出,式(8)在 T 大于 10 时的精度略优于 MCSC 方法的精度,表明该方法在计算区间略大的问题时是有优势的。

3　结束语

对变系数 Volterra 型积分微分方程,分别提出了 Legendre 谱 Galerkin 数值积分方法和 Legendre Galerkin 最小二乘方法。第一种方法采用 Legendre tau 方法进行离散,因此,对奇数阶方程其格式具有对称的特点,从而方便今后格式收敛性分析的研究。在计算中,采用了 Chebyshev-Gauss-Lobatto 配置点插值,使得格式可采用 FFT 算法得到其系数,所以提高了格式计算效率。对区间较大的模型,通过合理选择区间剖分数量和增加多项式次数,使得算法在实施中具有自适应技术的优点。第二种方法,基于最小二

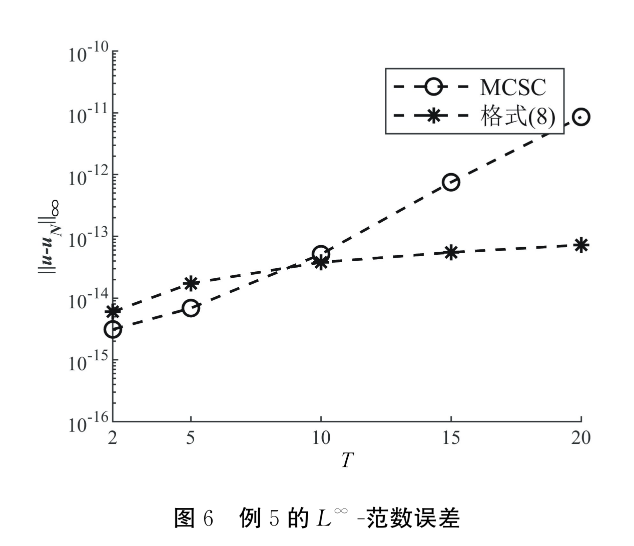


图 6　例 5 的 L^∞ -范数误差

乘原理,研究了 Legendre 谱 Galerkin 最小二乘数值积分法。该方法对应的离散方程具有对称结构,因此便于采用迭代方法求解。数值算例验证了这两类 Legendre 谱 Galerkin 方法的高阶精度与有效性。数值算例说明了这两类方法对于变系数 Volterra 型积分微分方程有高阶精度。此外,将该方法的数值实验得到的数值误差与文献[18]中的误差进行比较,结果表明该方法具有一定的优越性。下一步将研究将该方法推广到非线性的 Volterra 的积分微分方程和带奇性模型的计算。

参考文献:

[1] BRUNNER H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations [M]. Cambridge:Cambridge University Press,2004.

[2] CHUKWU E N. Volterra integro-differential neutral dynamics for the growth of wealth of nations: a controllability theory[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics,1998,29(7):723-799.

[3] TANG Tao,YUAN Wei. The further study of a certain nonlinear integro-differential equation [J]. Journal of Computational Physics,1987,72(2):486-497.

[4] TANG Tao. A note on collocation methods for Volterra integro-differential equations with weakly singular kernels[J]. IMA Journal of Numerical Analysis,1993,13(1):93-99.

[5] YANG Yin, CHEN Yanping. Spectral collocation methods for nonlinear Volterra integro-differential equations with weakly singular kernels[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society,2019,42(1):297-314.

[6] SHENG Changtao, WANG Zhongqing, GUO Benyu. Amultistep legendre-gauss spectral collocation method for nonlinear volterra integral equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2014, 52 (4): 1953-1980.

[7] BRUNNER H. Implicit Runge -Kutta methods of optimal order for Volterra integro-differential equations [J]. Mathematics of Computation,1984,42(165):95-109.

[8] WEN Jiao,HUANG Chengming,LI Min. Stability analysis of Runge -Kutta methods for Volterra integro-differential equations [J]. Applied Numerical Mathematic,2019,146:73-88.

[9] YI Lijun,GUO Benqi. An hp version of the continuous-Petrov-Galerkin finite element method for Volterra integro-differential equations with smooth and nonsmoothkernels[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,2015,53(6):2677-2704.

[10] XIE Ziqiang,LI Xianjuan,TANG Tao. Convergence analysis of spectral Galerkin methods for Volterra type integral equations[J]. Journal of Scientific Computing,2012,53(2):414-434.

[11] LI Qifa,XIE Ziqing,TAO Xia. Supergeometric convergence of spectral Legendre Galerkin approach for linear integro-differential equations [J]. Journal of Natural Science of Hunan University,2013,36(2):1-7.

[12] HUANG Can. Spectral Galerkin methods for a weakly singular Volterra integral equation of the second kind [J]. IMA Journal of Numerical Analysis,2016,37(3):1411-1436.

[13] TAO Xia, XIE Ziqiang, ZHOU Xiaojun. Spectral Petrov-Galerkin methods for the second kind volterra type integro-differential equations[J]. Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications, 2011, 4(2):216-236.

[14] LAELI DASTJERDI H,MAALEK GHAINI F M. Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations by moving least square method and Chebyshev polynomials [J]. Applied Mathematical Modelling,2012,36(7):3283-3288.

[15] MASHALLA M,ELHAM T,MASOUMEH P. Applicationof moving least squares algorithm for solving systems of Volterra integral equations[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,2021,22(3):255-265.

[16] JIANG Yingjun. On spectral methods for Volterra type integro -differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 230 (2): 333-340.

[17] LI Jin,CHENG Yongling. Numerical solution of Volterra integro -differential equations with linear barycentric rational method[J]. Internation Journal of Applied

and Computational Mathematics,2020,6(5):137.

[18] GU Zhendong. Multi-step chebyshev spectral collocation method for volterra integro -differential equations [J]. Calcolo,2016,53(4):559-583.

[19] WANG Zhongqing,GUO Yuling,YI Lijun. An hp-version Legendre Jacobi spectral collocation method for Volterra integro-differential equations with smooth and weakly singular kernels[J]. Mathematics of Computation,2017,86(307):2285-2324.

[20] TANG Jianguo,MA Heping. Single and multi-interval Legendre τ -methods in time for parabolic equations [J]. Advances in Computational Mathematics,2002,17(4):349-367.

[21] ZHANG Yanyan,MA Heping. Legendre -tau spectral method for initial value problems of ordinary differentialequations[J]. Comunication on Applied Mathematics and Computation,2017,31(1):85-95.

[22] QIN Yonghui,MA Heping. Legendre -tau-Galerkin and spectral collocation method for nonlinear evolution equations[J]. Applied Numerical Mathematics,2020,153:52-65.

[23] KARIMI S,JOZI M. A new iterative method for solvinglinear Fredholm integral equations using the least squares method[J]. Applied Mathematics and Computation,2015,250:744-758.

[24] 胡玉巧,覃永辉,范友康. 抛物方程的 Legendre Galerkin 谱配置最小二乘法[J]. 桂林电子科技大学学报,2021,41(1):55-60.

[25] MALEKNEJAD K,KHODABIN M,ROSTAMI M. Numerical solution of stochastic volterra integral equations by a stochastic operational matrix based on block pulse functions[J]. Mathematical and Computer Modelling,2012,55(3):791-800.

[26] AHMADINIA M,AFSHARI A H,HEYDARI M. Numerical solution of Ito-Volterra integral equation by least squares method[J]. Numerical Algorithms,2020,84(2):591-602.

编辑:张所滨